

Raja-arvon laskeminen

26. marraskuuta 2007

1 Yksinkertaisen raja-arvolaskennan eri vaihtoehdot

Pitkän matematiikan 7-kurssilla raja-arvolaskuissa voi tulla vastaan kolme eri tilannetta Raja-arvon laskeminen aloitetaan *aina* sijoittamalla annettu kohta x_0 lausekkeeseen.

1. Raja-arvo saadaan suoraan sijoittamalla
2. Sijoituksen jälkeen lauseke $\frac{0}{\text{jotain}}$
3. Sijoituksen jälkeen lauseke $\frac{0}{0}$
4. Sijoituksen jälkeen lauseke $\frac{\text{jotain}}{0}$

1.1 Suora sijoitus

Aloita aina raja-arvon laskenta suoralla sijoituksella $x = x_0$. Funktion raja-arvo on aina sama kuin funktion arvo, mikäli funktio on määritelty kohdassa x_0 .

Esimerkki 1.1

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3}{x - 3} = \frac{5^2 - 3}{5 - 3} = \frac{22}{2} = 11$$

1.2 Muoto $\frac{0}{\text{jotain}}$

Raja-arvo on 0.

Esimerkki 1.2

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 3} = \frac{5^2 - 25}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

1.3 Tapaus $\frac{0}{0}$

Jos raja-arvokohta on sekä osoittajan että nimittäjän nollakohta, niin sekä osoitteja että nimittäjä ovat jaollisia $(x - x_0)$:lla, joten sillä voidaan supistaa. Muista, että toisen asteen yhtälön nollakohtien tulo $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ joten $x_2 = \frac{c}{x_1a}$. Ja vielä kun muistat, että $ax^2 - bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, niin tulomuotoon muuttaminen on hieman helpompaa.

Esimerkki 1.3

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \frac{\cancel{(x - 5)}(x + 5)}{\cancel{(x - 5)}} = x + 5 \rightarrow 10, \text{ kun } x \rightarrow 5.$$

1.4 Tapaus $\frac{\text{jotain}}{0}$

Tällöin tarkastellaan toispuoleisia raja-arvoja. Raja-arvot ovat $\pm\infty$.

1.5 Tehtäviä

1. Määritä

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - 5}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x^2 + 4}$

(e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^8 - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x - 1)^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 4x - 4}{(x - 2)^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$